Résonances dans les systèmes hyperboliques et hamiltoniens

Viviane Baladi

Analyse harmonique et approximation rationnelle, Porquerolles Septembre 2003

Abstract. Ce texte est une brève introduction aux "résonances de Ruelle," c'est-à-dire les spectres d'opérateurs de transfert en relation avec les pôles et zéros de fonctions zêta dynamiques et les pôles de la transformée de Fourier des fonctions de corrélation.

1. Deux exemples élémentaires et fondamentaux – Les concepts de base

1.A. Matrice de transition finie et fonction zêta dynamique

Soit A une matrice finie $N \times N$ avec $N \geq 2$, de coefficients complexes. Alors, notant I la matrice identité $N \times N$, on a la formule (se rappeler de la série de $\log(1-t)$ et vérifier, d'abord dans le cas diagonal, que $\log \mathrm{Det}\, B = \mathrm{Tr}\, \log B$ pour une matrice finie):

$$\mathrm{Det}\,(I - zA) = \exp - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^m}{m} \mathrm{Tr}\, A^m \,.$$

Le membre de gauche de l'expression ci-dessus est un polynôme en z de degré au plus N, dont les zéros sont les inverses des valeurs propres non nulles de A (l'ordre du zéro est égal à la multiplicité algébrique de la valeur propre). Nous allons montrer que le membre de droite peut s'interpréter comme l'inverse d'une fonction zêta dynamique

$$\zeta_f(z) = \exp \sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^m}{m} \#\mathrm{Fix}\, f^m \,,$$

pour une dynamique à temps discret, c'est-à-dire une transformation f dont on considère les itérés $f^m = \overbrace{f \circ \cdots \circ f}^{m \text{ fois}}$ et leurs points fixes $\mathrm{Fix}\, f^m = \{x \mid f^m(x) = x\}$ (à noter que $\mathrm{Fix}\, f^m$ contient $\mathrm{Fix}\, f^k$ pour tout k divisant m).

En effet, si A est une matrice $N \times N$ de coefficients 0 et 1, on peut la voir comme une matrice de transitions et lui associer un *sous-décalage de type fini* sur l'alphabet $\mathcal{S} = \{1, \ldots, N\}$. Ce "sous-shift" est le décalage à gauche $(\sigma_A(x))_i = x_{i+1}$ sur l'espace des suites unilatérales admissibles

$$\Sigma_A^+ = \{(x_i) \in \mathcal{S}^{\mathbb{Z}^+} \mid A_{x_i x_{i+1}} = 1 \,, \forall i \in \mathbb{Z}^+\} \,.$$

Il est alors facile de voir que $\mathrm{Tr}\, A^m = \#\mathrm{Fix}\, \sigma_A^m$ (commencer par $m = 1$ et remarquer que x est fixé par σ_A si et seulement si $x = aaaaaaaaaaaaa\cdots$ avec $A_{aa} = 1$). On a donc bien $\mathrm{Det}\,(I - zA) = 1/\zeta_{\sigma_A}(z)$ (cf [BoL]).

Dans cet exemple la matrice A peut s'interpréter comme la (transposée) de la matrice de la restriction de l'opérateur de transfert non pondéré

$$\mathcal{L}\varphi(x) = \sum_{\sigma(y)=x} \varphi(y)\,,$$

aux fonctions $\varphi : \Sigma_A^+ \to \mathbb{C}$ qui ne dépendent que du coefficient x_0 (c'est un espace vectoriel de dimension N).

Pour terminer, notons que puisque les coefficients de A sont non-négatifs, le théorème classique de Perron-Frobenius s'applique (cf p. ex [Ba2]). Par exemple, si A satisfait une hypothèse d'apériodicité, c'est-à-dire s'il existe m_0 tel que A^{m_0} a tous ses coefficients (strictement) positifs, alors la matrice A (et donc l'opérateur $\mathcal{L}$) a une valeur propre simple $\lambda > 0$ égale à son rayon spectral, avec un vecteur propre strictement positif à droite $Au = \lambda u$ et à gauche $vA = \lambda v$, le reste du spectre étant contenu dans un disque de rayon strictement inférieur à λ. En fait, λ est l'exponentielle de l'entropie topologique de σ_A et les vecteurs u et v permettent de construire la mesure σ_A-invariante qui maximise l'entropie (cf p. ex [Ba2]).

Cette situation est un bon exemple introductif, mais elle est beaucoup trop simple: en général l'opérateur de transfert agit sur un espace de dimension infinie sur lequel il n'est souvent pas à trace. On arrive parfois quand même à interpréter les pôles d'une fonction zêta dynamique comme les inverses d'une partie de ses valeurs propres.

1.B. Fonction de corrélation et spectre de l'opérateur de transfert

Considérons une transformation du cercle f qui soit une petite perturbation C^2 de l'application $x \mapsto 2x$ (modulo 1). Cette application n'est pas inversible (elle a deux branches) et elle est localement uniformément dilatante (propriété d'hyperbolicité). On lui associe un opérateur de transfert pondéré

$$\mathcal{L}\varphi(x) = \sum_{f(y)=x} \frac{\varphi(y)}{|f'(y)|}\,,$$

qu'on peut faire agir sur les espaces de Banach de dimension infinie $L^1(Leb)$, $C^0(S^1)$, ou $C^1(S^1)$, où il est borné (mais pas compact). Le choix du poids $1/|f'|$, c'est-à -dire le Jacobien de la branche inverse, implique que le dual de $\mathcal{L}$ agissant (p. ex.) sur les mesures de Radon préserve la mesure de Lebesgue: $\int \mathcal{L}(\varphi)dx = \int \varphi\, dx$.

Rappelons que si $\mathcal{M}$ est un opérateur borné sur un espace de Banach $\mathcal{B}$, le *rayon spectral essentiel* de $\mathcal{M}$ est le plus petit $\rho \geq 0$ tel que le spectre de $\mathcal{M}$ en dehors du disque de rayon ρ ne contienne que des valeurs propres isolés de multiplicité finie (cf [Ka, Ba2]).

Dans cette situation, on peut montrer une propriété de *quasi-compacité:* le rayon spectral de $\mathcal{L}$ sur $C^1(S^1)$ est 1 alors que son rayon spectral essentiel ρ_{ess} est strictement inférieur à 1 (cf. p. ex. [Ba2]). (A noter que le spectre sur $L^1(Leb)$ ou

$C^0(S^1)$ est trop "gros:" pour ces deux Banach, chaque point du disque unité ouvert est une valeur propre de multiplicité infinie [CI].) En fait, pour l'opérateur agissant sur $C^1(S^1)$, on a même une situation de type Perron-Frobenius: 1 est une valeur propre simple pour un vecteur propre φ_0 positif (que l'on peut supposer d'intégrale 1, quitte à normaliser), et le reste du spectre est contenu dans un disque de rayon τ avec $\rho_{ess} \le \tau < 1$. Il y a donc un *trou spectral.* Les valeurs propres dans l'anneau $\rho_{ess} < |z| \le \tau$, s'il y en a, sont appelées *résonances.* Pour justifier cette terminologie, nous allons décrire les conséquences ergodiques de ces propriétés spectrales. Avant cela, remarquons qu'on peut démontrer que la fonction zêta dynamique $\zeta_{1/|f'|} = \exp \sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^m}{m} \sum_{x \in \mathrm{Fix}\, f^m} |(f^m)'(x)|^{-1}$ est méromorphe dans le disque de rayon $1/\rho_{ess}$, dans lequel ses pôles sont les inverses des valeurs propres de $\mathcal{L}$ sur $C^1(S^1)$, c'est-à-dire les résonances (et le pôle simple en 1).

Observons d'abord que la mesure de probabilité μ_0 absolument continue de densité φ_0 par rapport à Lebesgue est invariante par f: pour $\varphi \in L^1(Leb)$

$$\int \varphi \circ f \cdot \varphi_0 \, dx = \int \mathcal{L}((\varphi \circ f) \cdot \varphi_0) \, dx = \int \varphi \mathcal{L}(\varphi_0) \, dx = \int \varphi \varphi_0 \, dx \, .$$

On peut montrer que μ_0 est ergodique, le théorème de Birkhoff nous dit donc que pour φ dans $L^1(Leb)$ et μ_0-presque tout x (c'est-à-dire Lebesgue presque tout x!), les moyennes temporelles $(1/m) \sum_{k=0}^{m-1} \varphi(f^k(x))$ convergent vers la moyenne spatiale $\int \varphi \, d\mu_0$.

Nous allons maintenant voir que cette mesure μ_0 est exponentiellement mélangeante pour des fonctions tests φ_1, φ_2 dans $C^1(S^1)$. Puisque le projecteur spectral associé à la valeur propre 1 est $\varphi \mapsto \varphi_0 \cdot \int \varphi \, dx$, on a la décomposition spectrale

$$\mathcal{L}\varphi = \varphi_0 \int \varphi \, dx + \mathcal{P}\mathcal{L}\varphi \, ,$$

avec $\mathcal{P}$ le projecteur spectral associé au complémentaire de 1 dans le spectre, qui satisfait $\|\mathcal{P}\mathcal{L}^m\| \le C\tilde{\tau}^m$ pour tout $\tau < \tilde{\tau} < 1$ et pour la norme des opérateurs agissant sur C^1. Par conséquent,

$$\begin{aligned} \int \varphi_1 \circ f^m \cdot \varphi_2 \cdot \varphi_0 \, dx &= \int \mathcal{L}^m(\varphi_1 \circ f^m \cdot \varphi_2 \cdot \varphi_0) \, dx = \int \varphi_1 \mathcal{L}^m(\varphi_2 \cdot \varphi_0) \, dx \\ &= \int \varphi_1 [\varphi_0 \Big(\int \varphi_2 \cdot \varphi_0 \, dx \Big) + \mathcal{P}\mathcal{L}^m(\varphi_2 \cdot \varphi_0)] \, dx \\ &= \int \varphi_1 \, d\mu_0 \cdot \int \varphi_2 \, d\mu_0 + \int \varphi_1 \mathcal{P}\mathcal{L}^m(\varphi_2 \cdot \varphi_0) \, dx \, , \end{aligned}$$

et puisque

$$|\int \varphi_1 \mathcal{P}\mathcal{L}^m(\varphi_2 \cdot \varphi_0) \, dx| \le (\int |\varphi_1| dx) \cdot \|\mathcal{P}\mathcal{L}^m(\varphi_2 \varphi_0)\|_{C^1} \le C(\int |\varphi_1| dx) \|\varphi_2\|_{C^1} \cdot \tilde{\tau}^m \, ,$$

on a bien la décroissance exponentielle annoncée.

Finalement, notons que pour φ_1 et φ_2 dans $C^1(S^1)$, la transformée de Fourier

$$\widehat{C}_{\varphi_1\varphi_2}(\omega) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} e^{im\omega} C_{\varphi_1,\varphi_2}(m)\,.$$

de leur fonction de corrélation

$$C_{\varphi_1,\varphi_2}(m) = \begin{cases} \int \varphi_1 \circ f^m \cdot \varphi_2 \, d\mu_0 - \int \varphi_1 \, d\mu \int \varphi_2 \, d\mu_0 & m \geq 0\,, \\ C_{\varphi_2,\varphi_1}(-m) & m \leq 0\,, \end{cases}$$

est méromorphe dans la bande $|\Im\omega| \leq \log(\tau^{-1})$ où ses pôles sont les ω tels que $e^{\pm i\omega}$ est une *résonance:*

$$\begin{aligned} \sum_{m\in\mathbb{Z}^+} e^{im\omega} \Big(\int \varphi_1 \circ f^m \varphi_2 \, d\mu_0 - \int \varphi_1 \, d\mu_0 \int \varphi_2 \, d\mu_0 \Big) &= \sum_{m\in\mathbb{Z}^+} \int \varphi_1 \mathcal{P}(e^{i\omega}\mathcal{L})^m (\varphi_2\varphi_0)\, dx \\ = \int \varphi_1 \sum_{m\in\mathbb{Z}^+} \mathcal{P}(e^{i\omega}\mathcal{L})^m(\varphi_2\varphi_0)\, dx &= \int \varphi_1 \Big((1 - e^{i\omega}\mathcal{P}\mathcal{L})^{-1} (\varphi_2\varphi_0) \Big)\, dx\,. \end{aligned}$$

1.C. Concepts de base

Soit $f : M \to M$ une transformation et $g : M \to \mathbb{C}$ un poids. On suppose (ces hypothèses peuvent être en fait affaiblies) que $\mathrm{Fix}\, f^m$ est un ensemble fini pour chaque $m \geq 1$ fixé et que $\{y \mid f(y) = x\}$ est un ensemble fini pour chaque x.

Opérateur de transfert (de Ruelle) – Résonances. C'est l'opérateur linéaire

$$\mathcal{L}_{f,g}\varphi(x) = \sum_{y: f(y)=x} g(y)\varphi(y)\,.$$

agissant sur un espace de Banach (parfois Hilbert) approprié de fonctions ou distributions φ sur M. En général $\mathcal{L}$ est borné mais pas compact. Si on peut montrer que le rayon spectral essentiel ρ_{ess} est strictement inférieur au rayon spectral, on dit que $\mathcal{L}$ est *quasi-compact.* Le spectre de $\mathcal{L}$ en dehors du disque de rayon ρ_{ess} est appelé ensemble des résonances de (f, g).

Fonction zêta pondérée. C'est la série de puissances:

$$\zeta_{f,g}(z) = \exp \sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^m}{m} \sum_{x\in \mathrm{Fix}\, f^m} \prod_{k=0}^{m-1} g(f^k(x))\,.$$

On arrive parfois à montrer qu'elle est méromorphe dans un disque où ses pôles sont en bijection avec les résonances.

Déterminant dynamique (de Ruelle-Fredholm). On suppose de plus que f est (au moins) C^1 et on pose $\mathrm{Fix}_h f^m = \{x \in \mathrm{Fix}\, f^m \mid \mathrm{Det}\,(I - Df^{-m}(x)) \neq 0\}$. Le déterminant dynamique est la série de puissances

$$d_{f,g}(z) = \exp - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^m}{m} \sum_{x \in \mathrm{Fix}_h f^m} \frac{\prod_{k=0}^{m-1} g(f^k(x))}{\mathrm{Det}\,(I - Df^{-m}(x))} \, .$$

On arrive parfois à montrer qu'il est holomorphe dans un disque, plus grand que le disque associé à $\zeta_{f,g}$, où ses zéros sont en bijection avec les résonances.

Fonction de corrélation. Soit μ une mesure de probabilité f-invariante (par exemple une mesure absolument continue par rapport à Lebesgue ou un état d'équilibre pour $\log|g|$). La fonction de corrélation de (f, μ) pour une classe de fonctions $\varphi : M \to \mathbb{C}$ est la fonction $C_{\varphi_1,\varphi_2} : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{C}$ définie pour φ_1, φ_2 dans cette classe par

$$C_{\varphi_1,\varphi_2}(m) = \int \varphi_1 \circ f^m \cdot \varphi_2 \, d\mu - \int \varphi_1 \, d\mu \int \varphi_2 \, d\mu \, .$$

Des notions analogues existent pour les dynamiques à temps continus (flots, notamment les flots géodésiques en courbure négative pas forcément constante). La fonction zêta $\zeta(s)$ est alors souvent holomorphe dans un demi-plan $\Re(s) > s_0$ et admet une extension méromorphe dans un domaine plus grand. Nous renvoyons aux divers "surveys" de la bibliographie, qui mentionnent également les références aux articles fondateurs de Smale, Artin-Mazur, Ruelle, etc.

2. Théorèmes de Ruelle, Keller, Pollicott, Dolgopyat...

Les auteurs mentionnés dans le titre ne sont pas les seuls à avoir fourni d'importantes contributions à la théorie des fonctions zêta dynamiques et des opérateurs de transfert. Il faudrait citer (cf. la bibliographie) aussi Fried, Mayer, Hofbauer, Haydn, Sharp, Rugh, Kitaev, Liverani, Buzzi, et bien d'autres (notamment Cvitanović pour une approche plus physique). Nous essaierons d'aborder les quatre thèmes suivants dans le cours:

1. *Ruelle* [Ru4] a observé que l'opérateur de transfert associé à une dynamique à temps discret *dilatante et analytique* et un poids analytique est nucléaire (à trace) sur un espace de Banach approprié de fonctions holomorphes. Dans ce cas, la fonction zêta dynamique est un produit alterné de "vrais" déterminants de Fredholm-Grothendieck et le déterminant dynamique est un "vrai" déterminant. (Dans le cas où contraction et dilatation coexistent, une hypothèse de régularité des feuilletages était nécessaire jusqu'à [Rug1, Fr2].) Ceci permet de montrer que la fonction zêta et la transformée de Fourier de la fonction de corrélation admettent une extension méromorphe à tout le plan, dans certains cas. Nous mentionnerons une toute récente version "espaces de Hilbert" de Guillopé, Lin et Zworski [GLZ], qui obtiennent la densité des résonances (au sens "classique" qui coïncide avec le sens de Ruelle ici) de certains groupes de Schottky.

2. La *dynamique symbolique* permet de modéliser une dynamique hyperbolique par un sous-décalage de type fini, moyennant des partitions de Markov (Sinai, Ratner, cf. [Bo]). Le "Jacobien instable" est une fonction Lipschitz dans les coordonnées symboliques. On étudie donc des opérateurs de transfert $\mathcal{L}_{\sigma_A,g}$ associés au sous-décalage unilatéral σ_A et à un poids g *Lipschitz (ou Hölder):* ils sont bornés, mais pas compacts, sur l'espace de Banach des fonctions Lipschitz. C'est *Ruelle* [p.ex: Bo, Ba3] qui a démontré le premier théorème de type Perron-Frobenius pour ce type de situations: on a un trou spectral et donc décroissance exponentielle des corrélations dans les bons cas. En combinant les résultats de Ruelle [Ru2], *Pollicott* [Po2] et Haydn [Ha1], on obtient une extension méromorphe de la transformé de Fourier de la fonction de corrélation à une bande optimale dans le cadre symbolique.

3. Plusieurs années après les travaux fondateurs de Lasota et Yorke sur l'existence de mesures invariantes absolument continues, Hofbauer et *Keller* [HK1, HK2, Ke] ont montré la quasi-compacité de l'opérateur de transfert associé à des dynamiques de l'intervalle *dilatantes par morceaux* (non nécessairement markoviennes), agissant sur les fonctions à variation bornée. Cet opérateur n'est pas compact, mais la fonction zêta dynamique $\zeta_{f,g}$ possède une extension méromorphe non triviale à un disque où ses pôles sont décrits par les résonances de l'opérateur [BK]. Le cas de la dimension supérieure est beaucoup plus récent [BM, Sa] et on a seulement des résultats partiels [BuKe]. On a des résultats plus forts pour des dynamiques localement *dilatantes* (donc markoviennes) et *différentiables* [CI, GL], pour lesquelles on peut étudier aussi le déterminant dynamique $d_{f,g}(z)$ [Ru6, Fr3] (et aussi [Ki, BKL] dans le cadre hyperbolique). Nous discuterons les résultats récents de Collet et Eckmann [CE], qui montrent qu'en géneral le taux "essentiel" de décroissance des correlations est plus lent que le plus petit exposant de Lyapunov, contrairement à une idée reçue.

4. Le cas des *systèmes dynamiques à temps continu* est beaucoup plus délicat. On sait depuis longtemps comment obtenir une extension méromorphe de la fonction zêta d'un flot hyperbolique à un demi-plan plus grand que le demi-plan de convergence [p. ex Ru9, Po3]. Parry–Pollicott [PP2] ont obtenu un analogue du théorème des nombres premiers pour les flots hyperboliques, suivi de bien d'autres résultats de comptage. Ikawa [Ik] a aussi pu démontrer une conjecture de Lax-Phillips (modifiée, voir aussi [St2]). Cependant, il faut une bande verticale sans pôles pour avoir la décroissance exponenielle des corrélations, et ce n'est pas toujours possible: Ruelle [Ru8] a construit des exemples de flots uniformément hyperboliques qui ne mélangent pas exponentiellement. C'est seulement récemment que *Dolgopyat* [Do1, Do2] a pu montrer notamment la décroissance exponentielle des corrélations pour certains flots d'Anosov, en utilisant des méthodes d'intégrales oscillantes. Nous essaierons de présenter son résultat, en mentionnant des conséquences pour les billards [St1, Pe, N1]. A noter que Liverani a introduit une méthode nouvelle pour obtenir la décroissance exponentielle des corrélations: au lieu de travailler avec une représentation du flot comme une suspension du difféomorphisme hyperbolique donné par une suspension de Poincaré sous un temps de retour, il étudie directement le semi-groupe d'opérateurs associé au flot [Li0, Li3].

References

Cette bibliographie n'est pas exhaustive, en dépit de sa longueur. Nous espérons que la décomposition en sous-rubriques, malgré son caractère un peu arbitraire, la rendra plus pratique. A noter que nous ne mentionnons pas du tout les (nombreux) résultats de décroissance sous-exponentielle des corrélations.

Articles de survol et livres

[Ba0] V. Baladi, *Dynamical zeta functions*, Version sur `www.math.jussieu.fr/~baladi/zeta.ps`, Proceedings of the NATO ASI "Real and Complex Dynamical Systems" (1993) (B. Branner et P. Hjorth, ed.), Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1995, pp. 1–26.

[Ba1] V. Baladi, *Periodic orbits and dynamical spectra*, Cf `www.math.jussieu.fr/~baladi/etds.ps`, Ergodic Theory Dynamical Systems **18** (1998), 255–292.

[Ba2] V. Baladi, *Positive Transfer Operators and Decay of Correlations*, Erratum disponible sur `www.math.jussieu.fr/~baladi/erratum.ps`, World Scientific, Singapore, 2000.

[Ba3] *The Magnet and the Butterfly: Thermodynamic formalism and the ergodic theory of chaotic dynamics*, Version disponible sur `www.math.jussieu.fr/~baladi/thermo.ps`, Développement des mathématiques au cours de la seconde moitié du XXe siècle, Birkhäuser, Basel, 2000.

[Ba4] V. Baladi, *Spectrum and Statistical Properties of Chaotic Dynamics*, Version disponible sur `www.math.jussieu.fr/~baladi/barbal.ps`, Proceedings Third European Congress of Mathematics Barcelona 2000, Birkhäuser, 2001, pp. 203-224.

[Ba5] V. Baladi, *Decay of correlations*, `www.math.jussieu.fr/~baladi/seattle.ps`, AMS Summer Institute on Smooth ergodic theory and applications, (Seattle, 1999), Proc. Symposia in Pure Math. Vol. 69, AMS, 2001, pp. 297–325.

[Bo] R. Bowen, *Equilibrium states and the ergodic theory of Anosov diffeomorphisms*, Springer (Lecture Notes in Math., Vol. **470**), Berlin, 1975.

[Cv] P. Cvitanović et al., *Classical and Quantum Chaos: A Cyclist Treatise*, Version disponible sur `www.cns.gatech.edu/ChaosBook`, 2003.

[DP] D. Dolgopyat et M. Pollicott, *Addendum to: "Periodic orbits and dynamical spectra"*, Ergodic Theory Dynam. Systems **18** (1998), 293–301.

[DS] N. Dunford et J.T. Schwartz, *Linear Operators, Part I, General Theory*, Wiley-Interscience (Wiley Classics Library), New York, 1988.

[E] J.-P. Eckmann, *Resonances in dynamical systems*, IXth International Congress on Mathematical Physics (Swansea, 1988), Hilger, Bristol, 1989, pp. 192–207.

[GGK] I. Gohberg, S. Goldberg et N. Krupnik, *Traces and Determinants of Linear Operators*, Birkhäuser, Basel, 2000.

[Ka] T. Kato, *Perturbation Theory for Linear Operators*, Second Corrected Printing of the Second Edition, Springer-Verlag, Berlin, 1984.

[Li0] C. Liverani, *Invariant measures and their properties. A functional analytic point of view*, Preprint (2002).

[M1] D. Mayer, *Continued fractions and related transformations*, Ergodic Theory, Symbolic Dynamics and Hyperbolic Spaces (T. Bedford et al., ed.), Oxford University Press, 1991.

[PP1] W. Parry et M. Pollicott, *Zeta functions and the periodic orbit structure of hyperbolic dynamics*, Société Mathématique de France (Astérisque, vol. **187-188**), Paris, 1990.

[Ru1] D. Ruelle, *Resonances of chaotic dynamical systems*, Phys. Rev. Lett **56** (1986), 405–407.

[Ru2] D. Ruelle, *Dynamical Zeta Functions for Piecewise Monotone Maps of the Interval,* CRM Monograph Series, Vol. 4, Amer. Math. Soc., Providence, NJ, 1994.

[Ru3] D. Ruelle, *Dynamical zeta functions and transfer operators*, Notices Amer. Math. Soc **49** (2002), 887–895.

[Zi] M. Zinsmeister, *Formalisme thermodynamique et systèmes dynamiques holomorphes*, Panoramas et Synthèses, 4. Société Mathématique de France, Paris, 1996.

Le cadre analytique

[BR] V. Baladi et H.H. Rugh, *Floquet spectrum of weakly coupled map lattices*, Comm. Math. Phys **220** (2001), 561–582.

[Fr1] D. Fried, *The zeta functions of Ruelle and Selberg I*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **19** (1986), 491–517.

[Fr2] D. Fried, *Meromorphic zeta functions for analytic flows*, Comm. Math. Phys. **174** (1995), 161–190.

[Gr1] A. Grothendieck, *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires (Mem. Amer. Math. Soc.* **16***)*, Amer. Math. Soc., 1955.

[Gr2] A. Grothendieck, *La théorie de Fredholm*, Bull. Soc. Math. France **84** (1956), 319–384.

[LSY] G. Levin, M. Sodin et P. Yuditskii, *A Ruelle operator for a real Julia set*, Comm. Math. Phys. **141** (1991), 119–131.

[M2] D. Mayer, *On the thermodynamic formalism for the Gauss map*, Comm. Math. Phys. **130** (1990), 311–333.

[Ru4] D. Ruelle, *Zeta functions for expanding maps and Anosov flows*, Inv. Math. **34** (1976), 231–242.

[Rug1] H.H. Rugh, *Generalized Fredholm determinants and Selberg zeta functions for Axiom A dynamical systems*, Ergodic Theory Dynam. Systems **16** (1996), 805–819.

[Rug2] H.H. Rugh, *Intermittency and regularized Fredholm determinants*, Invent. Math. (1999), 1–24.

Le cadre dynamique symbolique (Hölder-Lipschitz)

[BoL] R. Bowen et O.E. Lanford III, *Zeta functions of restrictions of the shift transformation*, Proc. Sympos. Pure Math. **14** (1970), 43–50.

[Ha1] N.T.A. Haydn, *Gibbs functionals on subshifts*, Comm. Math. Phys. **134** (1990), 217–236.

[Ha2] N.T.A. Haydn, *Meromorphic extension of the zeta function for Axiom A flows*, Ergodic Theory Dynamical Systems **10** (1990), 347–360.

[M] A. Manning, *Axiom A diffeomorphisms have rational zeta functions*, Bull. London Math. Soc. **3** (1971), 215–220.

[Po1] M. Pollicott, *A complex Ruelle operator theorem and two counter examples*, Ergodic Theory Dynamical Systems **4** (1984), 135–146.

[Po2] M. Pollicott, *Meromorphic extensions of generalised zeta functions*, Invent. Math. **85** (1986), 147– 164.

[Ru5] D. Ruelle, *One-dimensional Gibbs states and Axiom A diffeomorphisms*, J. Differential Geom. **25** (1987), 117–137.

Le cadre différentiable

[BKL] M. Blank, G. Keller et C. Liverani, *Ruelle-Perron-Frobenius spectrum for Anosov maps*, Nonlinearity **15** (2002), 1905-1973.

[CE] P. Collet et J.-P. Eckmann, *Liapunov Multipliers and Decay of Correlations in Dynamical Systems*, Preprint (2003) `mp_arc`.

[CI] P. Collet et S. Isola, *On the essential spectrum of the transfer operator for expanding Markov maps*, Comm. Math. Phys. **139** (1991), 551–557.

[Fr3] D. Fried, *The flat-trace asymptotics of a uniform system of contractions*, Ergodic Theory Dynamical Systems **15** (1995), 1061–1073.

[GL] V.M. Gundlach et Y. Latushkin, *A sharp formula for the essential spectral radius of the Ruelle transfer operator on smooth and Holder spaces*, Ergodic Theory Dynam. Systems **23** (2003), 175–191.

[Ki] A. Kitaev, *Fredholm determinants for hyperbolic diffeomorphisms of finite smoothness*, (see also Corrigendum, 1717–1719), Nonlinearity **12** (1999), 141–179.

[Ru6] D. Ruelle, *An extension of the theory of Fredholm determinants*, Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. **72** (1991), 175–193.

Situations non markoviennes (BV, famille logistique, Hénon...)

[BK] V. Baladi et G. Keller, *Zeta functions and transfer operators for piecewise monotone transformations*, Comm. Math. Phys. **127** (1990), 459–479.

[BY] M. Benedicks et L.-S. Young, *Markov extensions and decay of correlations for certain Hénon maps*, Géométrie complexe et systèmes dynamiques (Orsay, 1995), Astérisque No. 261, 2000, pp. 13–56.

[BuKe] J. Buzzi et G. Keller, *Zeta functions and transfer operators for multidimensional piecewise affine and expanding maps*, Ergodic Theory Dynam. Systems **21** (2001), 689–716.

[BM] J. Buzzi et V. Maume-Deschamps, *Decay of correlations for piecewise invertible maps in higher dimensions*, Israel J. Math **131** (2002), 203–220.

[HK1] F. Hofbauer et G. Keller, *Ergodic properties of invariant measures for piecewise monotonic transformations*, Math. Z. **180** (1982), 119–140.

[HK2] F. Hofbauer et G. Keller, *Zeta-functions and transfer-operators for piecewise linear transformations*, J. reine angew. Math. **352** (1984), 100–113.

[Ke] G. Keller, *On the rate of convergence to equilibrium in one-dimensional systems*, Comm. Math. Phys **96** (1984), 181–193..

[KN] G. Keller et T. Nowicki, *Spectral theory, zeta functions and the distribution of periodic points for Collet–Eckmann maps*, Comm. Math. Phys. **149** (1992), 31–69.

[Sa] B. Saussol, *Absolutely continuous invariant measures for multidimensional expanding maps*, Israel J. Math. **116** (2000), 223–248.

[Y] L.-S. Young, *Statistical properties of dynamical systems with some hyperbolicity*, Ann. of Math. (2) **147** (1998), 585–650.

Les méthodes de cônes de Birkhoff

[FS] P. Ferrero et B. Schmitt, *Produits aléatoires d'opérateurs matrices de transfert*, Probab. Theory Related Fields **79** (1988), 227–248.

[Li1] C. Liverani, *Decay of correlations*, Ann. of Math. (2) **142** (1995), 239–301.

[Li2] C. Liverani, *Decay of correlations for piecewise expanding maps*, J. Stat. Phys. **78** (1995), 1111–1129.

Les méthodes de "kneading" à la Milnor-Thurston

[Bai] M. Baillif, *Kneading operators, sharp determinants, and weighted Lefschetz zeta functions in higher dimensions*, Preprint (2003).

[BB] M. Baillif et V. Baladi, *Kneading determinants and spectrum in higher dimensions: the isotropic case*, Preprint (2003).

[BKRS] V. Baladi, A. Kitaev, D. Ruelle et S. Semmes, *Sharp determinants and kneading operators for holomorphic maps*, Proc. Steklov Inst. Math. **216** (1997), 186–228.

[BaRu] V. Baladi et D. Ruelle, *Sharp determinants*, Invent. Math. **123** (1996), 553–574.

[Go] S. Gouëzel, *Spectre de l'opérateur de transfert en dimension 1*, Manuscripta Math. **106** (2001), 365–403.

[MT] J. Milnor et W. Thurston, *Iterated maps of the interval*, Dynamical Systems (Maryland 1986-87) (J.C. Alexander, ed.), Lecture Notes in Math. Vol. 1342, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1988.

[Ru7] D. Ruelle, *Sharp zeta functions for smooth interval maps*, Proceedings Conference on Dynamical Systems (Montevideo, 1995), Pitman Res. Notes Math. Ser. 362, Longman, Harlow, 1996, pp. 188–206.

Aléatoire et stabilité spectrale

[BV] V. Baladi et M. Viana, *Strong stochastic stability and rate of mixing for unimodal maps*, Annales scient. Ecole normale sup. (4) **29** (1996), 483–517.

[BY] V. Baladi et L.-S. Young, *On the spectra of randomly perturbed expanding maps*, (Erratum, Comm. Math. Phys., **166**, 219–220 (1994)), Comm. Math. Phys. **156** (1993), 355–385.

[Bu] J. Buzzi, *Some remarks on random zeta functions.*, Ergodic Theory Dynam. Systems **22** (2002), 1031–1040.

[KL] G. Keller et C. Liverani, *Stability of the spectrum for transfer operators*, Annali Scuola Normale Sup. Pisa (4) **XXVIII** (1999), 141–152.

Les flots

[Do1] D. Dolgopyat, *On decay of correlations in Anosov flows*, Ann of Math. **147** (1998), 357–390.

[Do2] D. Dolgopyat, *Prevalence of rapid mixing for hyperbolic flows*, Ergodic Theory Dynam. Systems **18** (1998), 1097–1114.

[Li3] C. Liverani, *On contact Anosov flows*, Preprint (2002). A paraître Ann. of Math.

[PP2] W. Parry et M. Pollicott, *An analogue of the prime number theorem for closed orbits of Axiom A flows*, Ann. of Math. (2) **118** (1983), 573–591.

[Po3] M. Pollicott, *On the rate of mixing of Axiom A flows*, Invent. Math. **81** (1985), 413–426.

[Ru8] D. Ruelle, *Flots qui ne mélangent pas exponentiellement*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **296** (1983), 191–193.

[Ru9] D. Ruelle, *Resonances for Axiom A flows*, J. Differential Geom. **25** (1987), 99–116.

Applications et numérique

[AAC] R. Artuso, E. Aurell et P. Cvitanović, *Recycling of strange sets: I. Cycle expansions, II. Applications*, Nonlinearity **3** (1990), 325–359 et 361–386.

[BP] M. Babillot et M. Peigné, *Homologie des géodésiques fermées sur des variétés hyperboliques avec bouts cuspidaux*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **33** (2000), 81–120.

[BER] V. Baladi, J.-P. Eckmann et D. Ruelle, *Resonances for intermittent systems*, Nonlinearity **2** (1989), 119–135.

[CM] C.-H. Chang et D.H. Mayer, *Eigenfunctions of the transfer operators and the period functions for modular groups*, Dynamical, spectral, and arithmetic zeta functions (San Antonio, TX, 1999), Contemp. Math., 290, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2001, pp. 1–40.

[CCR] F. Christiansen, P. Cvitanović et H.H. Rugh, *The spectrum of the period-doubling operator in terms of cycles*, J. Phys. A **23** (1990), L713–L717.

[CRVR] P.Cvitanović, P.E. Rosenqvist, G. Vattay et H.H. Rugh, *A Fredholm determinant for semiclassical quantization*, Chaos **3** (1993), 619–636.

[DFS] M. Dellnitz, G. Froyland et S. Sertl, *On the isolated spectrum of the Perron-Frobenius operator*, Nonlinearity **13** (2000), 1171–1188.

[GLZ] L. Guillopé, K.K. Lin et M. Zworski, *The Selberg zeta function for convex co-compact Schottky groups*, Preprint (2002). A paraître Comm. Math. Phys.

[HM] J. Hilgert et D. Mayer, *Transfer operators and dynamical zeta functions for a class of lattice spin models*, Comm. Math. Phys. **232** (2002), 19–58.

[Ik] M. Ikawa, *Singular perturbation of symbolic flows and poles of the zeta functions*, Osaka J. Math. **27** (1990), 281–300.

[I] S. Isola, *Resonances in chaotic dynamics*, Comm. Math. Phys **116** (1988), 343–352.

[JP] O. Jenkinson et M. Pollicott, *Calculating Hausdorff dimensions of Julia sets and Kleinian limit sets*, Amer. J. Math. **124** (2002), 495–545.

[M3] D. Mayer, *The thermodynamic formalism approach to Selberg's zeta function for* $PSL(2,\mathbb{Z})$, Bull. Amer. Math. Soc. **25** (1991), 55–60.

[Mo] T. Morita, *Markov systems and transfer operators associated with cofinite Fuchsian groups*, Ergodic Theory Dynam. Systems **17** (1997), 1147–1181.

[N1] F. Naud, *Analytic continuation of a dynamical zeta function under a Diophantine condition*, Nonlinearity **14** (2001), 995–1009.

[N2] F. Naud, *Expanding maps on Cantor sets, analytic continuation of zeta functions with applications to convex co-compact surfaces*, Preprint 2003.

[PPe] S.J. Patterson et P.A. Perry, *The divisor of Selberg's zeta function for Kleinian groups*, Duke Math. J. **106** (2001), 321–390.

[Pe] V. Petkov, *Analytic singularities of the dynamical zeta function*, Nonlinearity **12** (1999), 1663–1681.

[PR] M. Pollicott et A.C. Rocha, *A remarkable formula for the determinant of the Laplacian*, Invent. Math **130** (1997), 399–414.

[PS] M. Pollicott et R. Sharp, *Exponential error terms for growth functions on negatively curved surfaces*, Amer. J. Math. **120** (1998), 1019–1042.

[St1] L. Stoyanov, *Spectrum of the Ruelle operator and exponential decay of correlations for open billiard flows*, Amer. J. Math. **123** (2001), 715–759.

[St2] L. Stoyanov, *Scattering resonances for several small convex bodies and the Lax-Phillips conjecture*, Preprint 2003.

V. Baladi: CNRS UMR 7586, Institut Mathématique de Jussieu, 75251 Paris, FRANCE
E-mail address: `baladi@math.jussieu.fr`